ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

2012/2013 учебный год

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Краткая инструкция для участника

Для того чтобы стать участником олимпиады, необходимо лично зарегистрироваться на портале олимпиады школьников «Ломоносов» по адресу: www.lomonosov.msu.ru и получить доступ в личный кабинет.

Оргкомитет принимает к рассмотрению работы участников отборочного этапа, поступившие только из личного кабинета на портале Олимпиады до 24 часов 21 января 2013 года включительно (по московскому времени).

Участник может направить только одну работу по каждому предмету (комплексу предметов). Файл с работой отборочного этапа должен иметь формат PDF (Portable Document Format). Для конвертации Ваших решений в формат PDF можно воспользоваться специальными бесплатными программами или встроенными инструментами Office Word. До момента окончания приема работ участник имеет возможность повторно направить исправленный файл с работой, при этом исходный файл заменяется новым и удаляется с портала Олимпиады.

Информация о получении работ оргкомитетом размещается на портале Олимпиады в личном кабинете участника.

Результаты отборочного этапа будут опубликованы на портале Олимпиады. Работы участников отборочного этапа не рецензируются, не копируются, не сканируются и не высылаются участникам или иным лицам.

Оформление решений (размер шрифта, междустрочные интервалы и пр.) участник выбирает самостоятельно, учитывая следующие требования:

– на листах ответов запрещается указывать фамилию, имя, отчество участника;
– нумерация ответов должна соответствовать нумерации олимпиадных заданий;
– решения или их части могут быть набраны на компьютере или написаны от руки и отсканированы;
– рукописные части работы (при их наличии), в том числе чертежи и рисунки, необходимо выполнять разборчиво ручкой с пастой синего или черного цвета.

Дополнительные требования к оформлению решений (в случае необходимости) приведены в тексте заданий.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

7–9 классы

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в соответствующей графе поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не нужно.

Задача	*Ответ*	*Балл*
...	...	...

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены. Работы с идентичными решениями не смогут претендовать на высокую оценку.

Не советуем прибегать к услугам репетиторов или более подготовленных товарищей, так как если Вас пригласят на следующий (очный) тур олимпиады, факт помощи станет очевидным, и Вы почувствуете себя неловко.

Призываем всех участников присылать свои работы, независимо от того, сколько задач вы смогли решить. Опыт предыдущих олимпиад показал, что шансы на участие в очном туре есть у всех! Удачи и сил!

7 класс

1. Два олигарха Алехандро и Максимилиан за 2012 год взяли и разграбили свою страну. Известно, что состояние Алехандро на конец 2012 года равняется двум состояниям Максимилиана на конец 2011 года. А состояние Максимилиана на конец 2012 года меньше, чем состояние Алехандро на конец 2011 года. Что больше: состояние Максимилиана на конец 2011 года или национальные богатства страны?

2. В гонке Формула-2013 участвуют 2 гонщика. Первый гонщик проехал 4 круга за то время, пока второй проехал три. В течение следующих трёх кругов из-за быстрой езды первому гонщику пришлось проехать дополнительно 20 метров по питстопу (не останавливаясь). Известно, что когда второй гонщик проехал 6 кругов, первый проехал 7,75 круга. Найдите длину круга. (Скорости гонщиков постоянны.)

3. За круглым столом собрались несколько юношей и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юношей справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

4. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: “Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек”. Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

5. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она надевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной руке ровно один раз?

6. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{2012\text{ раз}}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2012\text{ раз}}$

7. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

8. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку (маляр может переходить только на соседнюю по стороне клетку), эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

8 класс

1. Два олигарха Алехандро и Максимилиан за 2012 год взяли и разграбили свою страну. Известно, что состояние Алехандро на конец 2012 года равняется двум состояниям Максимилиана на конец 2011 года. А состояние Максимилиана на конец 2012 года меньше, чем состояние Алехандро на конец 2011 года. Что больше: состояние Максимилиана или национальные богатства страны?

2. За круглым столом собрались несколько юношей и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юношей справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

3. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она надевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной руке ровно один раз?

4. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: "Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек". Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

5. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{2012\text{ раз}} \cdot \underbrace{99\ldots9}_{2012\text{ раз}}$

6. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

7. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

8. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Её соединили со всеми вершинами треугольника, а также опустили перпендикуляры из неё на стороны, образовав 6 треугольников. Оказалось, что 4 из них равны. Всегда ли это означает, что треугольник равнобедренный?

9. Множество натуральных чисел называется *плохим*, если из него можно выбрать несколько чисел так, чтобы они в сумме давали 2012. Найдите наименьшее такое n, что числа 503, 504, ..., 2011 можно разбить на n множеств так, что все эти множества не были бы плохими.

9 класс

1. За круглым столом собрались несколько юношей и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юношей справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

2. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: "Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек". Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

3. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она надевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной руке ровно один раз?

4. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{2012\text{ раз}}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2012\text{ раз}}$

5. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

6. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

7. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Её соединили со всеми вершинами треугольника, а также опустили перпендикуляры из неё на стороны, образовав 6 треугольников. Оказалось, что 4 из них равны. Всегда ли это означает, что треугольник равнобедренный?

8. Множество натуральных чисел называется *плохим*, если из него можно выбрать несколько чисел так, чтобы они в сумме давали 2012. Найдите наименьшее такое n, что числа 503, 504, …, 2011 можно разбить на n множеств так, что все эти множества не были бы плохими.

9. На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята точка M. Из точки M на стороны AB и BC опущены перпендикуляры MN и MP. Где должна находиться точка M, чтобы длина отрезка NP была минимальной?

10. Решите уравнение:
$$\frac{8}{\{x\}}=\frac{9}{x}+\frac{10}{[x]},$$
где $[x]$ — наименьшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\}=x-[x]$.

10–11 классы

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в соответствующей графе поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не нужно.

Задача	*Ответ*	*Балл*
№1		
№2		
№3		
№4		
№5		
№6		
№7		
№8		
№9		
№10		

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены. Работы с идентичными решениями не смогут претендовать на высокую оценку.

Не советуем прибегать к услугам репетиторов или более подготовленных товарищей, так как если Вас пригласят на следующий (очный) тур олимпиады, факт помощи станет очевидным, и Вы почувствуете себя неловко.

Призываем всех участников присылать свои работы, независимо от того, сколько задач вы смогли решить. Опыт предыдущих олимпиад показал, что шансы на участие в очном туре есть у всех! Удачи и сил!

10–11 классы

1. Знайка сообщил коротышкам, что в декабре и в январе потребление арбузного сиропа в Зеленом городе в среднем составило 10 бочек в день и 5 бочек в день соответственно. Отсюда Незнайка сделал вывод, что дней, в которые потребление сиропа составляло не менее чем по 10 бочек, в декабре непременно было больше, чем в январе. Прав ли Незнайка?

2. Котёнок откусывает четверть сосиски с одного конца, после чего щенок откусывает треть оставшегося куска сосиски с противоположного конца, затем снова котенок — четверть со своего конца, а щенок — треть со своего конца и т. д. Требуется заранее перевязать сосиску поперек ниткой так, чтобы нитку никто не съел. В каком отношении она должна разделить сосиску?

3. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задана равенствами

$$a_1 = 100, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Найдите целое число, ближайшее к a_{2013}.

4. Участникам викторины было задано четыре вопроса: на первый вопрос правильно ответили 90 участников, на второй — 50, на третий — 40, а на четвертый — 20, причем никто не смог правильно ответить более чем на два вопроса. Каково наименьшее число участников викторины при этих условиях?

5. Фиксированный луч света падает на зеркало, образуя со своей проекцией на плоскость зеркала острый угол α. Зеркало поворачивают вокруг указанной проекции на острый угол β. Найдите угол между двумя отраженными лучами, полученными до и после поворота.

6. Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y), удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам

$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2, \quad \cos y < 2 + \cos 2x + \cos x(4 \sin t - 1) - \cos 2t.$$

Найдите площадь этой фигуры.

7. Вовочка написал на доске равенство $101 = 11011$. Учитель информатики сказал, что это равенство будет верным, если понимать его как запись одного и того же числа, но в разных системах счисления. Найдите основания этих систем.

8. Найдите минимальное значение дискриминанта квадратного трёхчлена, график которого не имеет общих точек с областями, расположенными ниже оси абсцисс и над графиком функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL, BM и CN, причем $\angle ANM = \angle ALC$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника LMN, две стороны которого равны 3 и 4.

10. При каких натуральных n и k неравенства $|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n$ и $|y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant k$ имеют одинаковые количества целочисленных решений $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$?